



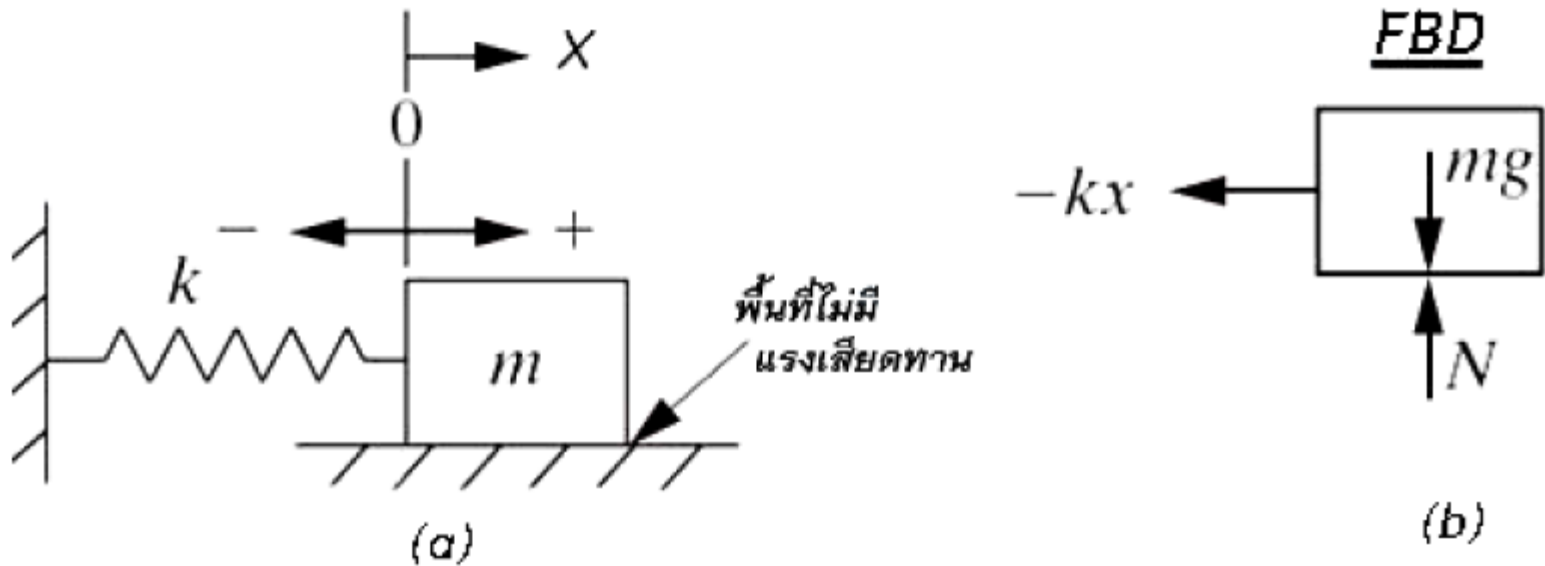
Free Vibration - SDOF

EQUATION OF MOTION

- กฎข้อที่สองของนิวตัน (Newton's second law)
- วิธีงาน-พลังงาน (Work-Energy method)
- วิธีของ Rayleigh
- สมการลากรางจ์ (Lagrange equation)

กฎข้อที่สองของนิวตัน

NEWTON'S SECOND LAW

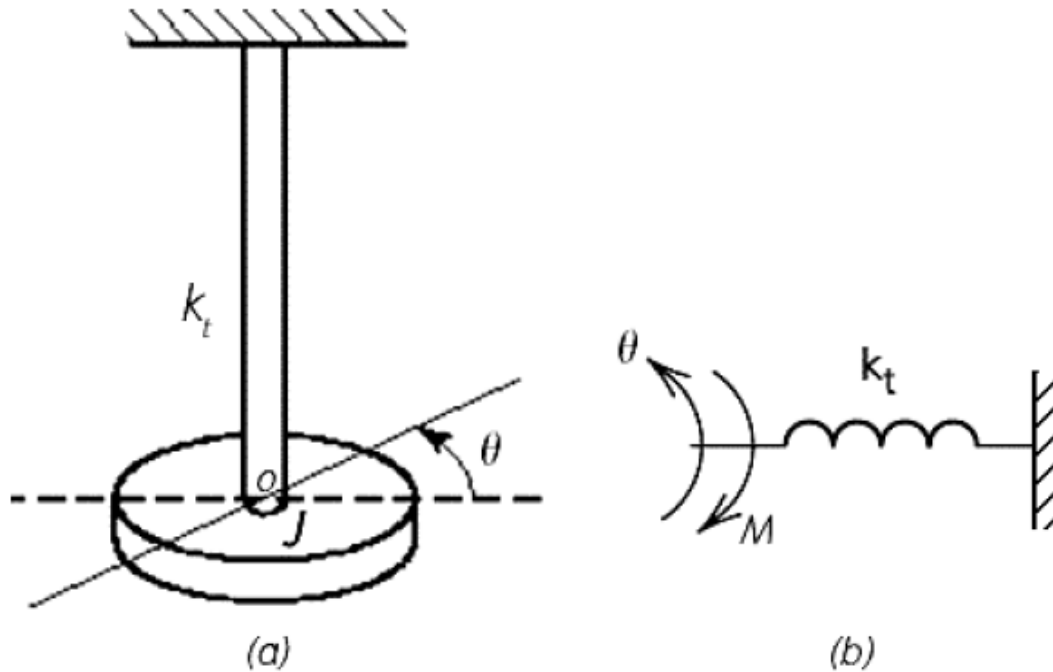


รูปที่ 2-1. ระบบที่มีลำดับชั้นความอิสระเท่ากับหนึ่งที่ไม่มีตัวหน่วง

$$\sum_i F_{xi} = m\ddot{x}$$

กฎข้อที่สองของนิวตัน

NEWTON'S SECOND LAW



รูปที่ 2-2. ระบบที่มีลำดับชั้นความอิสระเท่ากับหนึ่งแบบปิดที่ไม่มีตัวหน่วง

$$\sum_i M_{oi} = J\ddot{\theta}$$

วิธีงาน-พลังงาน

WORK-ENERGY METHOD

$$T + U = \text{ค่าคงที่}$$



$$\frac{d}{dt}(T + U) = 0$$

พลังงานจลน์ของมวล

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

พลังงานศักย์ของสปริง

$$U = \frac{1}{2} k x^2$$

วิธีงาน-พลังงาน

WORK-ENERGY METHOD

$$T + U = \text{ค่าคงที่}$$



$$\frac{d}{dt}(T + U) = 0$$

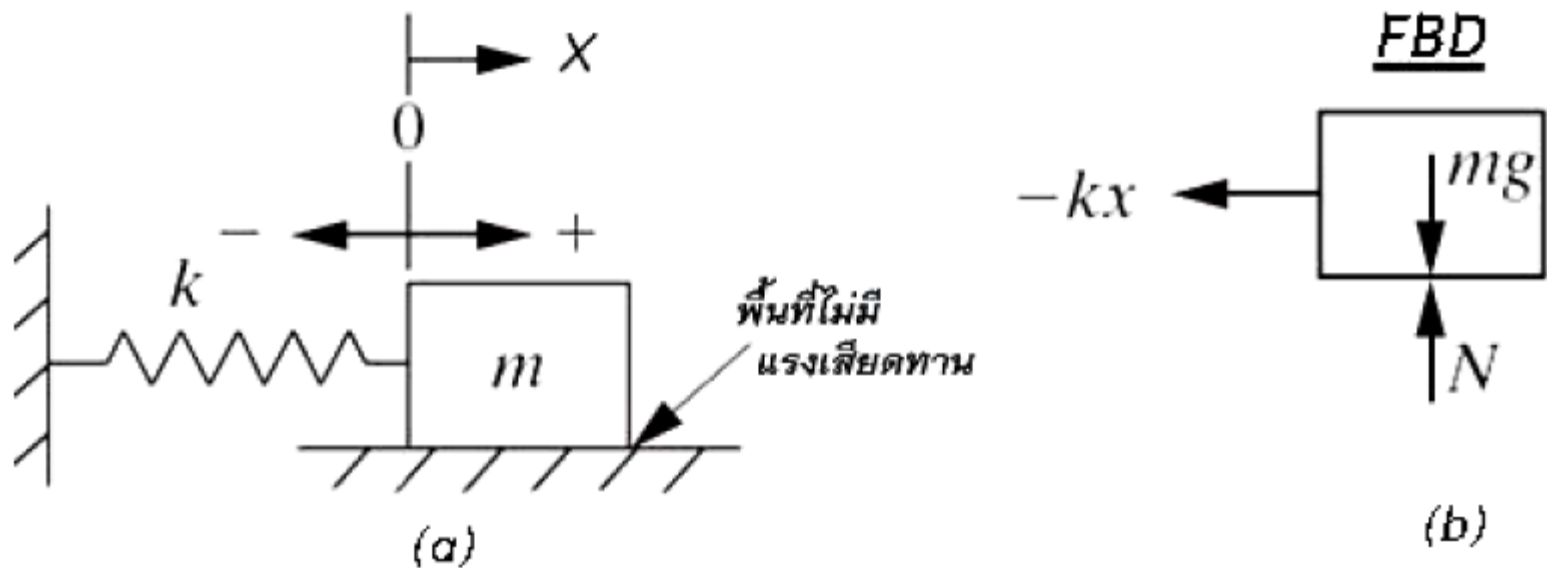
พลังงานจลน์ของมวล

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

พลังงานศักย์ของสปริง

$$U = \frac{1}{2} k x^2$$

UNDAMPED FREE VIBRATION



รูปที่ 2-1. ระบบที่มีลำดับชั้นความอิสระเท่ากับหนึ่งที่ไม่มีตัวหน่วง

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

UNDAMPED FREE VIBRATION

$$m\ddot{x} + kx = 0$$



$$m[s^2X(s) - sx_0 - v_0] + kX(s) = 0$$

เมื่อนิยามให้ $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ คือความถี่ธรรมชาติ (Natural frequency) ของระบบ เราจะได้

$$[s^2X(s) - sx_0 - v_0] + \omega_n^2X(s) = 0$$

และจัดรูปสมการ เราจะได้

$$X(s) = \frac{sx_0 + v_0}{s^2 + \omega_n^2} = x_0 \left(\frac{s}{s^2 + \omega_n^2} \right) + \frac{v_0}{\omega_n} \left(\frac{\omega_n}{s^2 + \omega_n^2} \right)$$

UNDAMPED FREE VIBRATION

เมื่อเราทำแปลงลาปลาซผกผัน สมการ 2.17 เราจะได้ผลเฉลยของสมการ 2.2 เป็น

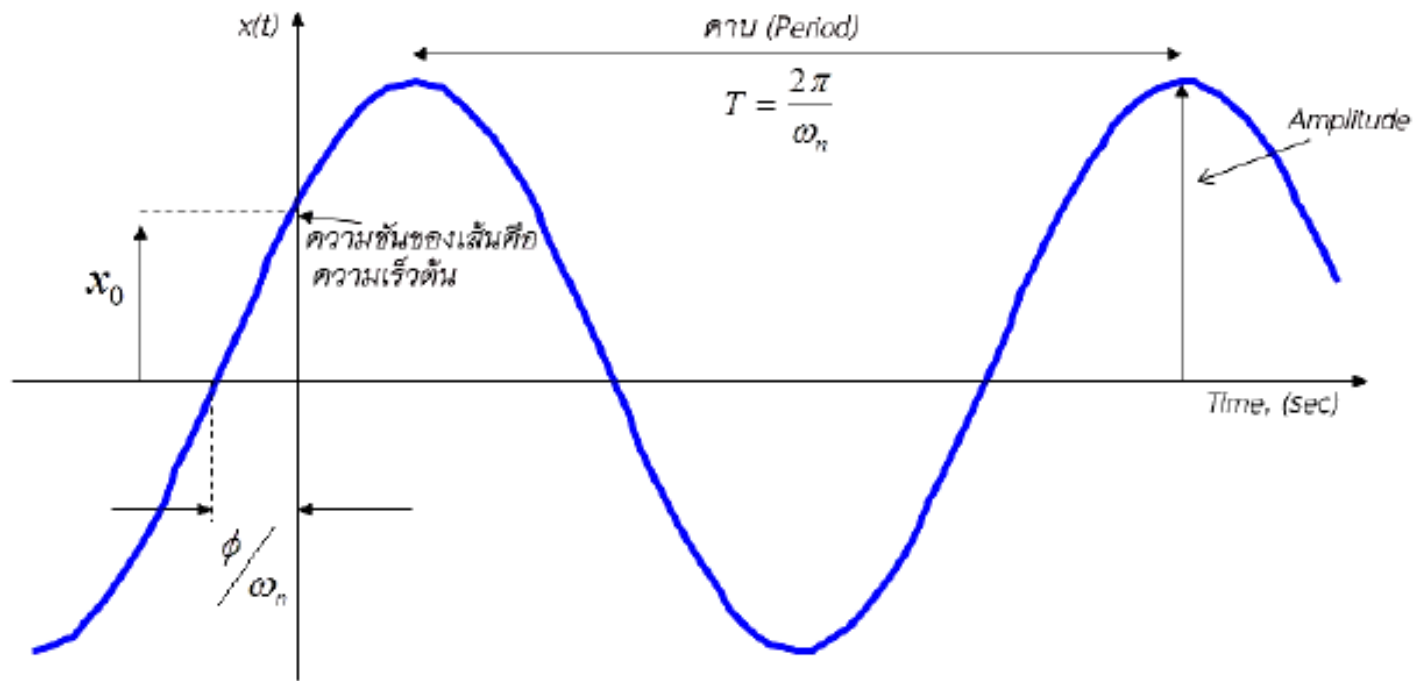
$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{v_0}{\omega_n} \sin \omega_n t \quad (2.18)$$

หรือ

$$x(t) = A \sin(\omega_n t + \phi) \quad (2.19)$$

โดยที่ $A = \frac{1}{\omega_n} \sqrt{\omega_n^2 x_0^2 + v_0^2}$, $\phi = \tan^{-1} \left(\frac{\omega_n x_0}{v_0} \right)$

UNDAMPED FREE VIBRATION



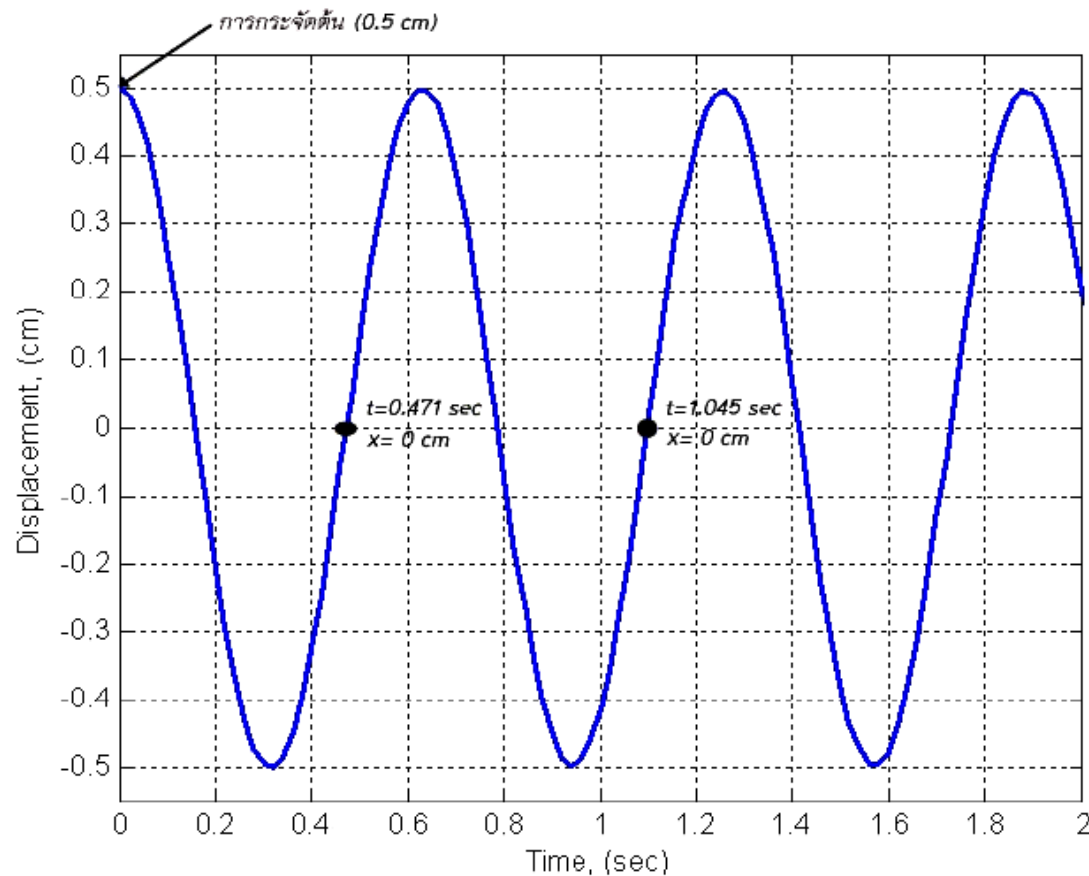
รูปที่ 2-4. การเคลื่อนที่ของสมการ 2.19

ตัวอย่างที่ e2-1 ระบบมวล-สปริง ดังแสดงในรูปที่ 2-1 เมื่อระบบมีมวลเท่ากับ 50 kg และมีค่าความแข็งของสปริงเท่ากับ 5,000 N/m จงพิจารณาการสั่นแบบอิสระของระบบมวล-สปริง

กรณี 1 เมื่อระบบมีค่าการกระจัดเริ่มต้นเท่ากับ 0.5 cm และมีค่าความเร็วเริ่มต้นเท่ากับศูนย์

ระบบจะมีสมการการเคลื่อนที่ $x(t) = 0.5 \cos 10t$ cm

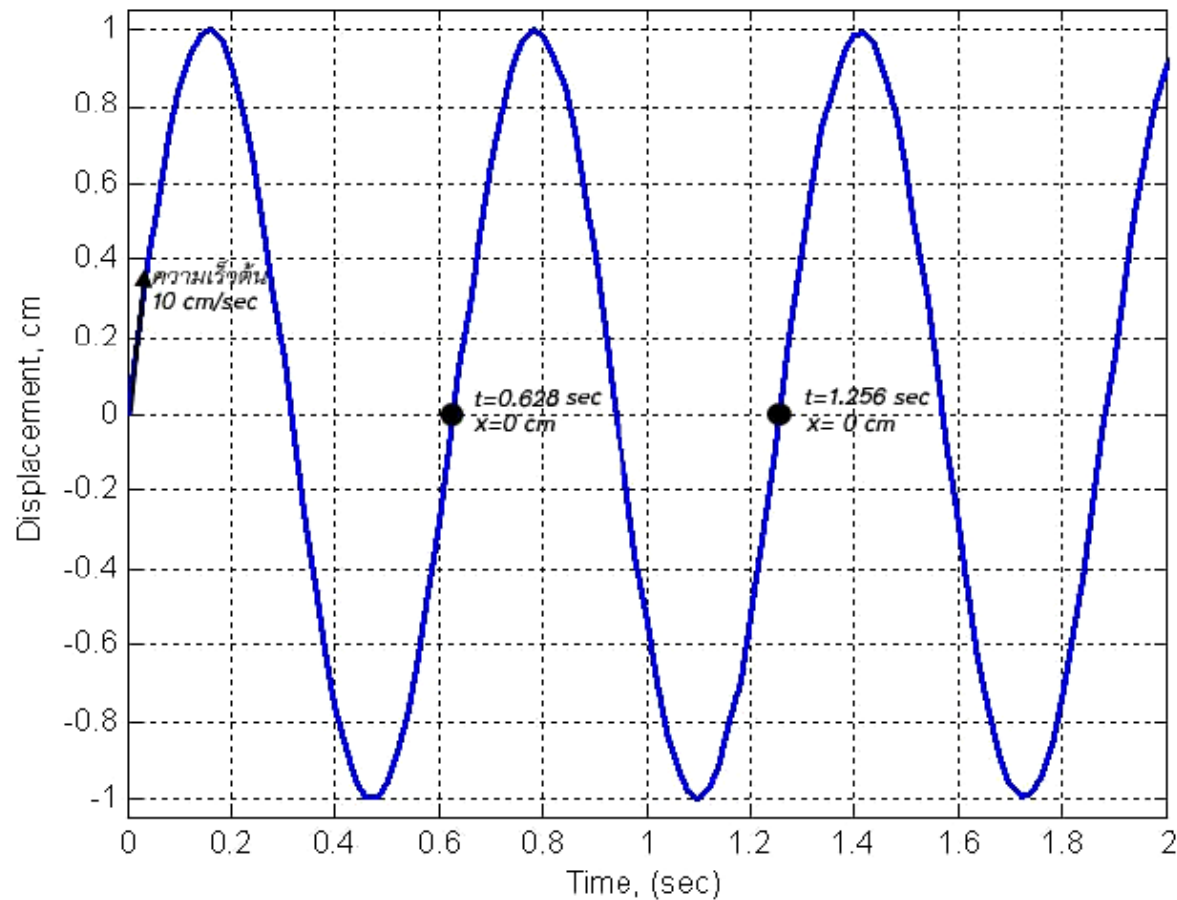
และลักษณะการเคลื่อนที่ดังแสดงในรูปที่ e2-1 ซึ่งจะมีขนาดการสั่นเท่ากับการกระจัดเริ่มต้น และความถี่ในการเคลื่อนที่เท่ากับ $\omega = \frac{2\pi}{T}$ โดยพิจารณาโดยประมาณจากรูป $T = 1.045 - 0.471 = 0.628$ sec เราจะได้ความถี่โดยประมาณ $\omega \approx \frac{2\pi}{0.628} \approx 10$ rad/sec ซึ่งจะเท่ากับความถี่ธรรมชาติของระบบเป็นไปตามทฤษฎีที่กล่าวข้างต้น และแผนภาพ Simulink ของระบบ ดังแสดงในรูปที่ e2-2



รูปที่ e2-1. การเคลื่อนที่ของสมการ $x(t) = 0.5 \cos 10t$ cm

กรณี 2 เมื่อระบบมีค่าการกระจัดเริ่มต้นเท่ากับศูนย์และมีค่าความเร็วเริ่มต้นเท่ากับ 10 cm/sec

เราจะได้สมการการเคลื่อนที่ $x(t) = 1\sin 10t \text{ cm}$



รูปที่ e2-3. การเคลื่อนที่ของสมการ $x(t) = 1\sin 10t \text{ cm}$

กรณี 3 เมื่อระบบมีค่าการกระจัดเริ่มต้นเท่ากับ 0.5 cm และมีค่าความเร็วเริ่มต้นเท่ากับ 10 cm/sec

เราจะได้สมการการเคลื่อนที่ $x(t) = 1.118 \sin(10t + 26.56^\circ) \text{ cm}$

หรือ $x(t) = 1.118 \sin(10t + 0.4636) \text{ cm}$

และลักษณะการเคลื่อนที่มีความถี่เท่ากับความถี่ธรรมชาติ มุมเฟสเท่ากับ 26.56 องศาหรือ 0.4636

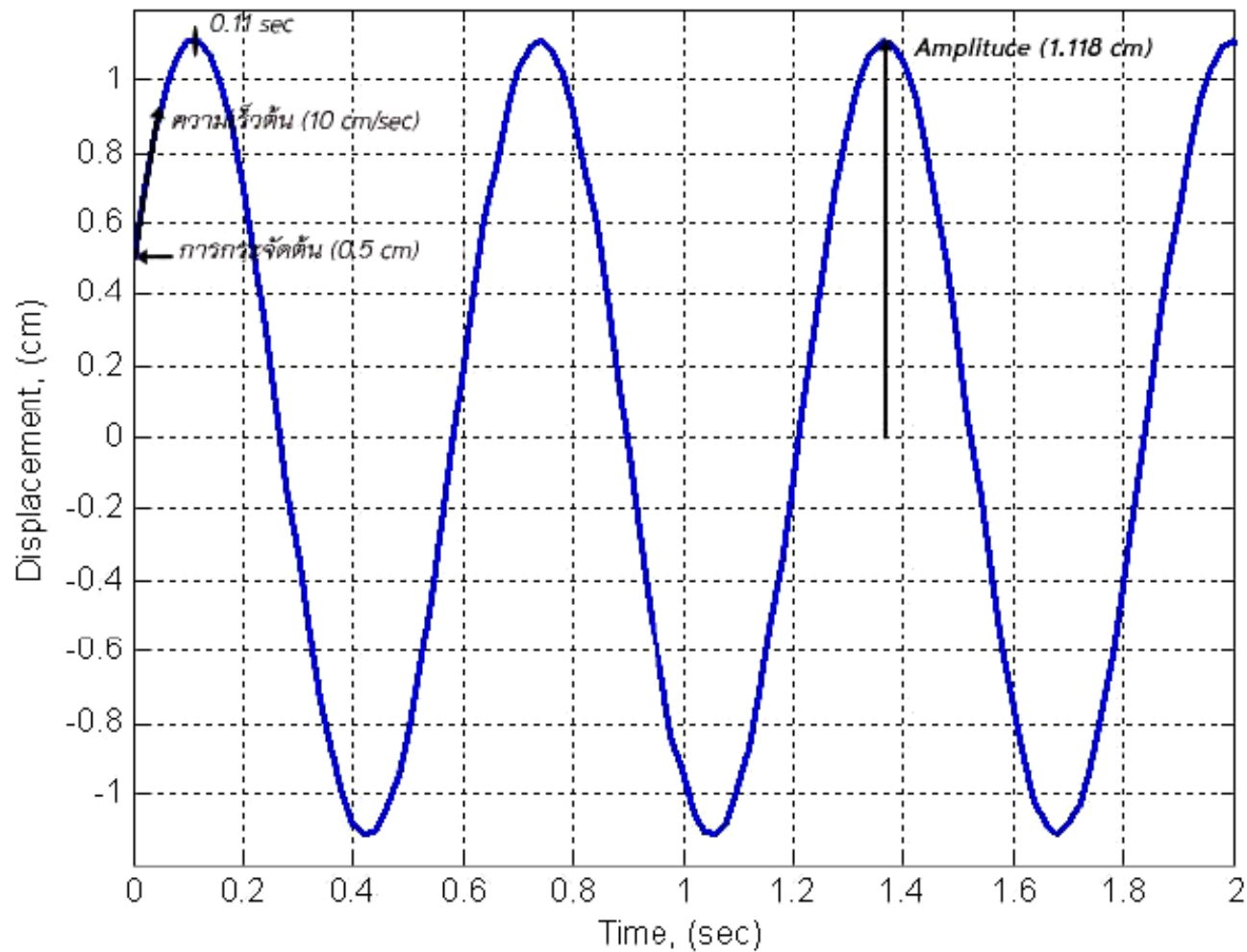
เรเดียน และมีขนาดการสั่นเท่ากับ $\frac{1}{\omega_n} \sqrt{\omega_n^2 x_0^2 + v_0^2} = 1.118 \text{ cm}$ ดังแสดงในรูปที่ e2-4 ในการหามุม

เฟสจากกราฟของการเคลื่อนที่ที่สามารถหาได้จากเวลาที่มีขนาดการสั่นสูงสุดที่เกิดขึ้นครั้งแรก ซึ่งเราจะได้

$$x_{\max}(t_1) = 1.118 \sin(10t_1 + 0.4636) = 1.118 \text{ cm}$$

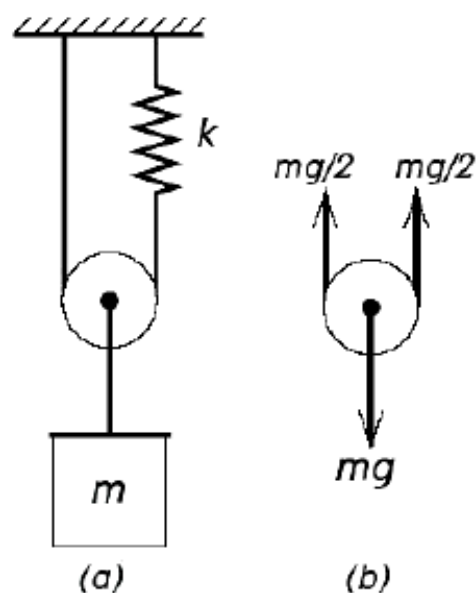
ดังนั้น $\sin(10t_1 + 0.4636) = 1$

ซึ่ง $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ ดังนั้น $10t_1 + 0.4636 = \frac{\pi}{2} \rightarrow t_1 = 0.11 \text{ sec}$



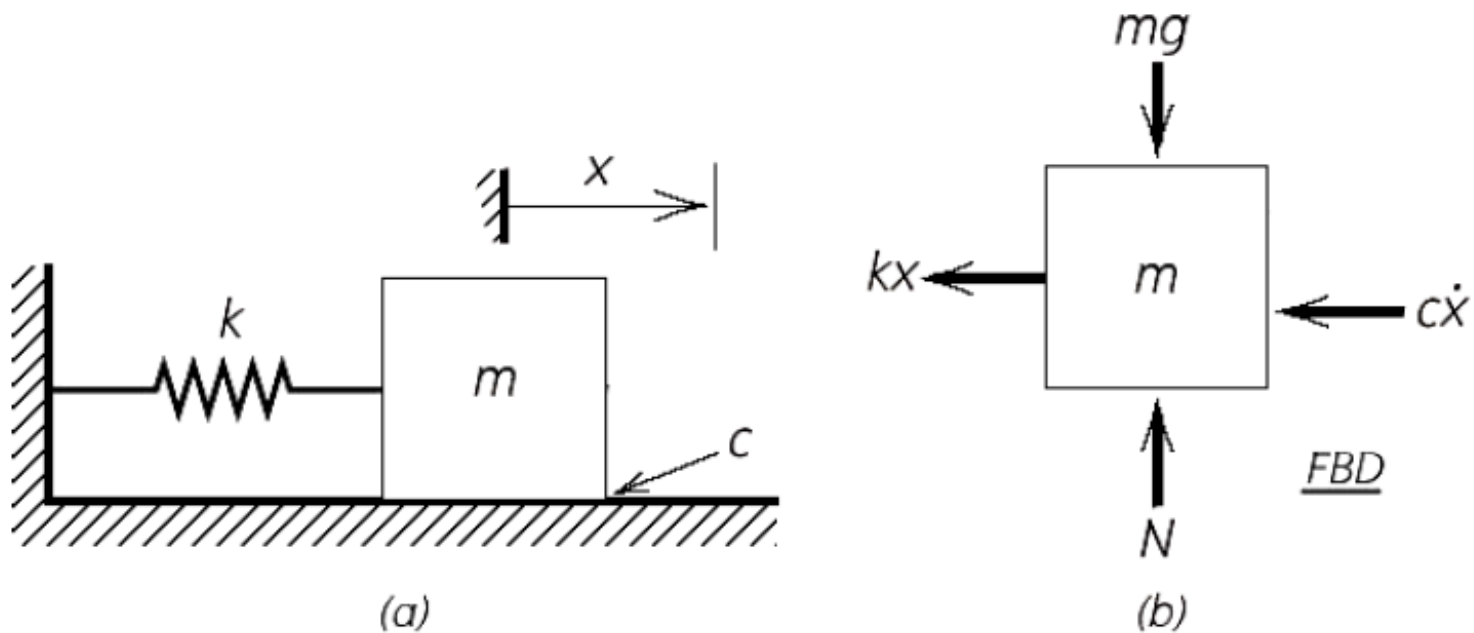
รูปที่ e2-4. การเคลื่อนที่ของสมการ $x(t) = 1.118 \sin(10t + 26.56^\circ)$ cm

ตัวอย่างที่ e2-3 ระบบมวล-สปริงของ pulley ดังแสดงในรูปที่ e2-7 (a) เราสามารถประมาณแบบจำลองกายภาพได้ดังแสดงในรูปที่ e2-7 (b) โดยเราไม่คิดคำนึงถึงมวลของสปริงและ pulley เมื่อเปรียบเทียบกับมวล m และมีค่า m เท่ากับ 50 kg และค่าความแข็งของสปริงเท่ากับ 1000 N/m



รูปที่ e2-7. ระบบมวล-สปริงของ pulley

DAMPED FREE VIBRATION



รูปที่ 2-5.แบบจำลองกายภาพของการสั่นแบบอิสระของระบบมีความหน่วงแบบหนืด

$$-c\dot{x} - kx = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

DAMPED FREE VIBRATION

เมื่อเราทำการแปลงลาปลาซของสมการข้างต้น โดยกำหนดให้ x_0 - การกระจัดต้นและ v_0 - ความเร็วต้นของระบบเราจะได้

$$m[s^2X(s) - sx_0 - v_0] + c[sX(s) - x_0] + kX(s) = 0$$

เมื่อนิยามให้ $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ คือความถี่ธรรมชาติ (Natural frequency) ของระบบ เราจะได้

$$[ms^2 + cs + k]X(s) = (ms + c)x_0 + mv_0$$

$$X(s) = \frac{(ms + c)x_0 + mv_0}{ms^2 + cs + k} \quad (2.21)$$

DAMPED FREE VIBRATION

- ✓ ค่าของ s_1 และ s_2 จะมีค่าเท่ากันและเป็นจำนวนจริง ถ้า $c^2 - 4mk = 0$ ค่าคงที่ความหน่วงที่ได้ในกรณีนี้ เราเรียกว่า ค่าความหน่วงวิกฤต $c_c = 2\sqrt{mk}$

1a)

และนิยามค่าอัตราส่วนความหน่วง (Damping ratio) $\zeta = \frac{c}{c_c}$

ซึ่งระบบนี้จะมีค่าอัตราส่วนความหน่วงเท่ากับหนึ่ง และเป็น ระบบความหน่วงวิกฤต (Critically damped system)

- ✓ ค่าของ s_1 และ s_2 จะมีค่าเป็นจำนวนจริง ถ้า $c^2 - 4mk > 0$ เราจะเรียกระบบนั้นว่า ระบบความหน่วงสูง (Overdamped system) ซึ่งจะมีค่าอัตราส่วนความหน่วงมากกว่าหนึ่ง
- ✓ ค่าของ s_1 และ s_2 จะมีค่าเป็น complex conjugate ถ้า $c^2 - 4mk < 0$ เราจะเรียกระบบนั้นว่า ระบบความหน่วงต่ำ (Underdamped system) ซึ่งจะมีค่า $0 < \zeta < 1$

DAMPED FREE VIBRATION

- Overdamped – free vibration
- Critically damped – free vibration
- Underdamped – free vibration

CRITICALLY DAMPED – FREE VIBRATION

กรณีที่ 1 ระบบมีความหน่วงวิกฤต ($\zeta = 1$) เราสามารถจัดสมการ 2.21 ใหม่ โดยการแทน $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$,

พิจารณาผลเฉลยที่ได้ตั้งสมการที่ 2.23 รากสมการของระบบความหน่วงวิกฤตนั้นเท่ากับ ω_n เมื่อ $t \rightarrow \infty$ ระบบจะมีการตอบสนองที่ลู่เข้าหาศูนย์ เพราะ $e^{-\omega_n t} \rightarrow 0$ และระบบจะมี Dominant time constant เท่ากับ $\tau = 1/\omega_n$ sec ดังนั้นระบบจะเข้าสู่สมดุลที่ประมาณห้าเท่าของ τ

จัดรูปแบบสมการใหม่ได้

$$X(s) = \frac{(s + \omega_n)x_0}{(s + \omega_n)^2} + \frac{\omega_n x_0 + v_0}{(s + \omega_n)^2} = \frac{x_0}{(s + \omega_n)} + \frac{\omega_n x_0 + v_0}{(s + \omega_n)^2}$$

เมื่อทำลาปลาซผกผัน (Inverse Laplace) เราจะได้ผลเฉลยสำหรับกรณีนี้ คือ

$$x(t) = x_0 e^{-\omega_n t} + (\omega_n x_0 + v_0) t e^{-\omega_n t} \quad (2.23)$$

OVERDAMPED – FREE VIBRATION

กรณีที่ 2. ระบบความหน่วงสูง ($\zeta > 1$) เราสามารถจัดสมการ 2.22 ใหม่ ได้ดังนี้

$$X(s) = \frac{(s + 2\zeta\omega_n)x_0 + v_0}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{(s + 2\zeta\omega_n)x_0 + v_0}{(s - s_1)(s - s_2)} \quad (2.24)$$

สำหรับสมการที่ 2.24 เราจะได้

อช

$$X(s) = \frac{(s + 2\zeta\omega_n)x_0 + v_0}{(s - s_1)(s - s_2)} = \frac{A_1}{(s - s_1)} + \frac{A_2}{(s - s_2)} \quad (2.25)$$

$$\text{โดยที่ } A_1 = \left[(s - s_1)X(s) \right]_{s=s_1} = \frac{\omega_n \left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) x_0 + v_0}{2\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

$$A_2 = \left[(s - s_2)X(s) \right]_{s=s_2} = -\frac{\omega_n \left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) x_0 + v_0}{2\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

OVERDAMPED – FREE VIBRATION

เมื่อทำลาปลาซผกผัน สำหรับสมการ 2.25 เราจะได้ผลเฉลยสำหรับกรณีนี้ คือ

$$x(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

หรือ

$$x(t) = \left[\frac{\omega_n (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) x_0 + v_0}{2\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} \right] e^{(-\zeta\omega_n + \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1})t} - \left[\frac{\omega_n (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) x_0 + v_0}{2\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} \right] e^{(-\zeta\omega_n - \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1})t} \quad (2.26)$$

พิจารณาผลเฉลยที่ได้ตั้งสมการที่ 2.26 เมื่อ $t \rightarrow \infty$ ระบบจะมีการตอบสนองที่ลู่เข้าหาศูนย์ เพราะ $e^{(-\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1})t} \rightarrow 0$, รากสมการของระบบความหน่วงสูงนั้นจะเป็นจำนวนจริง และความเร็วของการตอบสนองที่ลู่เข้าหาศูนย์จะช้ากว่าระบบความหน่วงวิกฤต

UNDERDAMPED – FREE VIBRATION

กรณีที่ 3. ระบบความหน่วงต่ำ ($0 < \zeta < 1$) เราจะได้รากสมการ s_1 และ s_2 จะมีค่าเป็น complex conjugate คือ

$$s_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \quad \text{หรือ} \quad s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (2.27)$$

เมื่อ $0 < \zeta < 1$ และนิยามความถี่ธรรมชาติความหน่วง (Damped natural frequency) $\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$

ดังนั้น เราจัดรูปรากสมการใหม่ได้

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} = -\sigma \pm i\omega_d$$

โดยที่ $\sigma = \zeta\omega_n$ และ $i = \sqrt{-1}$ ดังนั้นสำหรับกรณีนี้ จัดรูปรากสมการใหม่ได้

$$\begin{aligned} s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 &= (s + \zeta\omega_n)^2 - (\zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2 \\ &= (s + \sigma)^2 + \omega_d^2 \end{aligned}$$

UNDERDAMPED – FREE VIBRATION

เราสามารถจัดสมการ 2.24 ใหม่ ได้ดังนี้

$$X(s) = \frac{(s + 2\zeta\omega_n)x_0 + v_0}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{(s + \sigma)x_0 + v_0}{(s + \sigma)^2 + \omega_d^2} \quad (2.28)$$

$$\text{หรือ } X(s) = \frac{(s + \sigma)x_0}{(s + \sigma)^2 + \omega_d^2} + \frac{\sigma x_0 + v_0}{(s + \sigma)^2 + \omega_d^2} = \frac{(s + \sigma)x_0}{(s + \sigma)^2 + \omega_d^2} + \left(\frac{\sigma x_0 + v_0}{\omega_d} \right) \frac{\omega_d}{(s + \sigma)^2 + \omega_d^2} \quad (2.29)$$

เมื่อทำการแปลง inverse Laplace สำหรับสมการ 2.29 เราจะได้ผลเฉลยสำหรับกรณีนี้ คือ

$$x(t) = x_0 e^{-\sigma t} \cos \omega_d t + \left(\frac{\sigma x_0 + v_0}{\omega_d} \right) e^{-\sigma t} \sin \omega_d t \quad (2.30)$$

UNDERDAMPED – FREE VIBRATION

เมื่อทำการแปลง inverse Laplace สำหรับสมการ 2.29 เราจะได้ผลเฉลยสำหรับกรณีนี้ คือ

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 e^{-\sigma t} \cos \omega_d t + \left(\frac{\sigma x_0 + v_0}{\omega_d} \right) e^{-\sigma t} \sin \omega_d t \\&= e^{-\sigma t} \left[x_0 \cos \omega_d t + \left(\frac{\sigma x_0 + v_0}{\omega_d} \right) \sin \omega_d t \right]\end{aligned}\tag{2.30}$$

หรือ

$$x(t) = e^{-\sigma t} A \cos(\omega_d t - \phi)\tag{2.31}$$

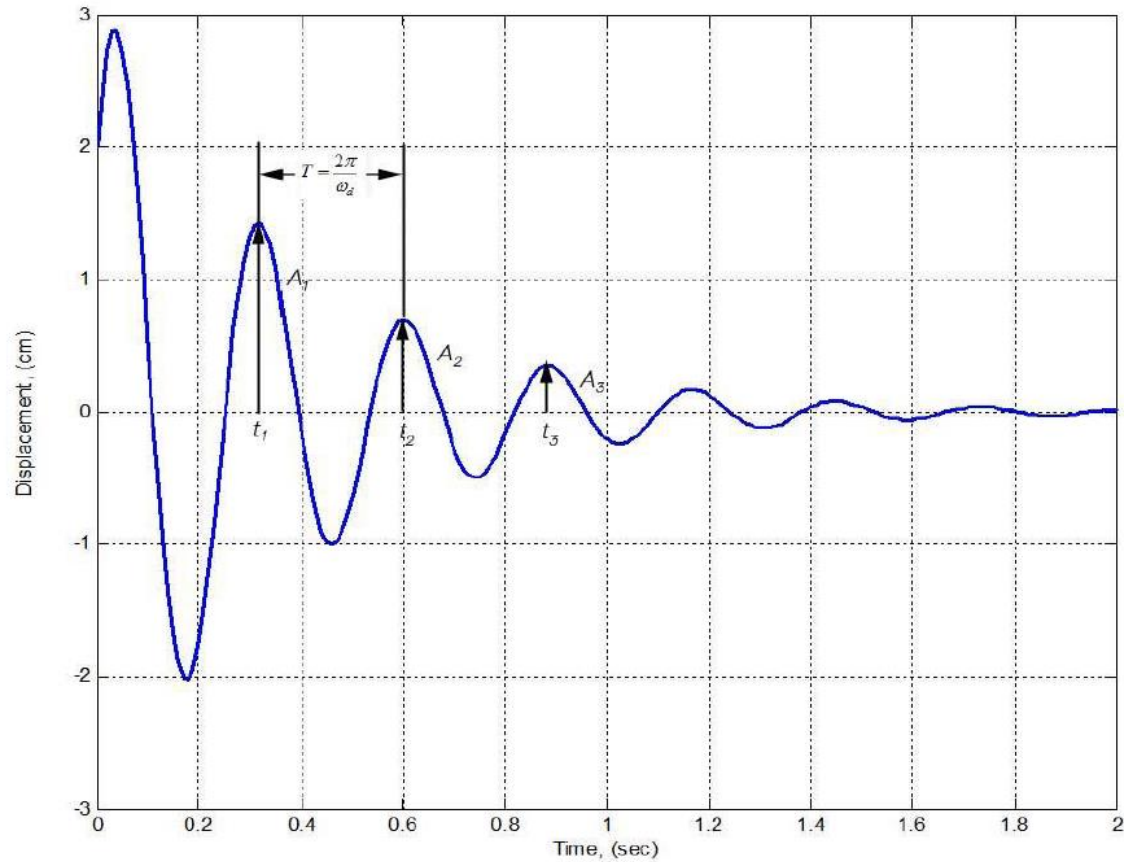
โดยที่

$$A = \frac{1}{\omega_d} \sqrt{(v_0 + \zeta \omega_n x_0)^2 + (x_0 \omega_d)^2}, \quad \phi = \tan^{-1} \left(\frac{x_0 \omega_d}{v_0 + \zeta \omega_n x_0} \right)$$

UNDERDAMPED – FREE VIBRATION

พิจารณาผลเฉลยที่ได้ตั้งสมการที่ 2.31 รากสมการของระบบความหน่วงต่ำนั้นจะเป็น complex conjugate และเมื่อ $t \rightarrow \infty$ ระบบจะมีการเคลื่อนที่ลู่เข้าหาศูนย์เพราะ $e^{-\sigma t} \rightarrow 0$ ระบบมี Dominant time constant เท่ากับ $\tau = 1/\sigma$ sec ดังนั้นระบบจะเข้าสู่สมดุลที่ประมาณห้าเท่าของ τ และลักษณะการตอบสนองจะมีการแกว่งตัวด้วยความถี่ธรรมชาติความหน่วงก่อนที่จะเข้าหาศูนย์

การลดลงอย่างลอการิทึม (LOGARITHMIC DECREMENT)



รูปที่ 2-6. การสั่นอิสระของระบบความหน่วงต่ำ

การลดลงอย่างลอการิทึม (LOGARITHMIC DECREMENT)

การตอบสนองของการสั่นอิสระ ดังแสดงในรูปที่ 2-6 เมื่อพิจารณาสัดส่วนขนาดการสั่นที่เวลา t_1 และ t_2 เราจะได้

โดยที่ $t_2 = t_1 + T$ และ $T = \frac{2\pi}{\omega_d}$ เป็นคาบการสั่นอิสระของระบบที่มีความหน่วงต่ำ ดังนั้น

ถ้าค่าอัตราส่วนความหน่วงมีค่าน้อย ค่าลดลงอย่างลอการิทึมก็จะมีค่าน้อยเช่นเดียวกัน ดังนั้นเราสามารถประมาณค่าอัตราส่วนความหน่วงในกรณีที่มีค่าน้อยได้ คือ

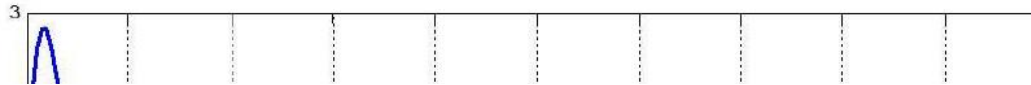
$$\zeta \approx \frac{\delta}{2\pi} \quad (2.35)$$

$$\rho = \ln \frac{A_1}{A_2} = \zeta \omega_n \frac{1}{\omega_d} = \zeta \omega_n \frac{1}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (2.36)$$

ดังนั้น เราจะได้

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} \quad (2.34)$$

การลดลงอย่างลอการิทึม (LOGARITHMIC DECREMENT)



$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} = \dots = \frac{A_n}{A_{n+1}} = e^{2\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (2.36)$$

หรือ

$$\frac{A_1}{A_{n+1}} = \frac{A_1}{A_2} \frac{A_2}{A_3} \dots \frac{A_n}{A_{n+1}} = \left(e^{2\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \right)^n = e^{2\pi n\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

การลดลงอย่างลอการิทึม

$$\delta = \ln \frac{A_1}{A_2} = \ln \frac{A_2}{A_3} = \dots = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

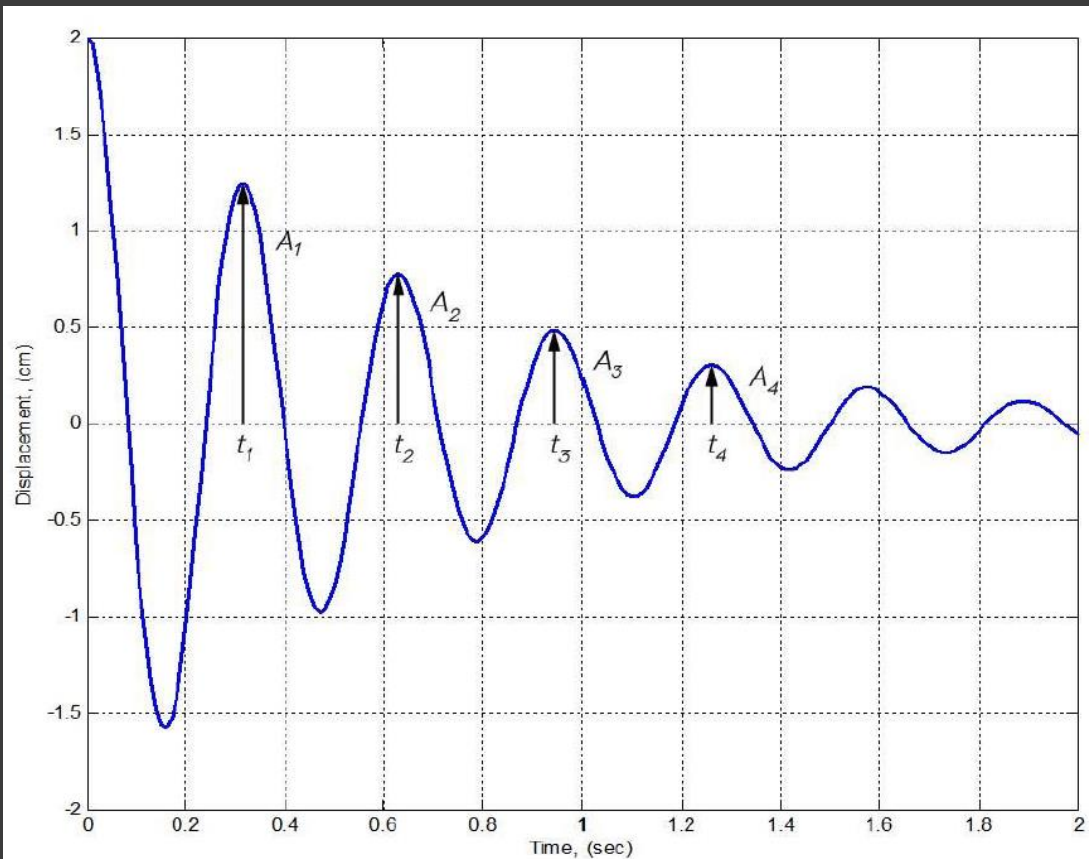
ดังนั้น

$$\ln \frac{A_1}{A_{n+1}} = n\delta = \frac{2\pi n\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (2.37)$$

หรือ

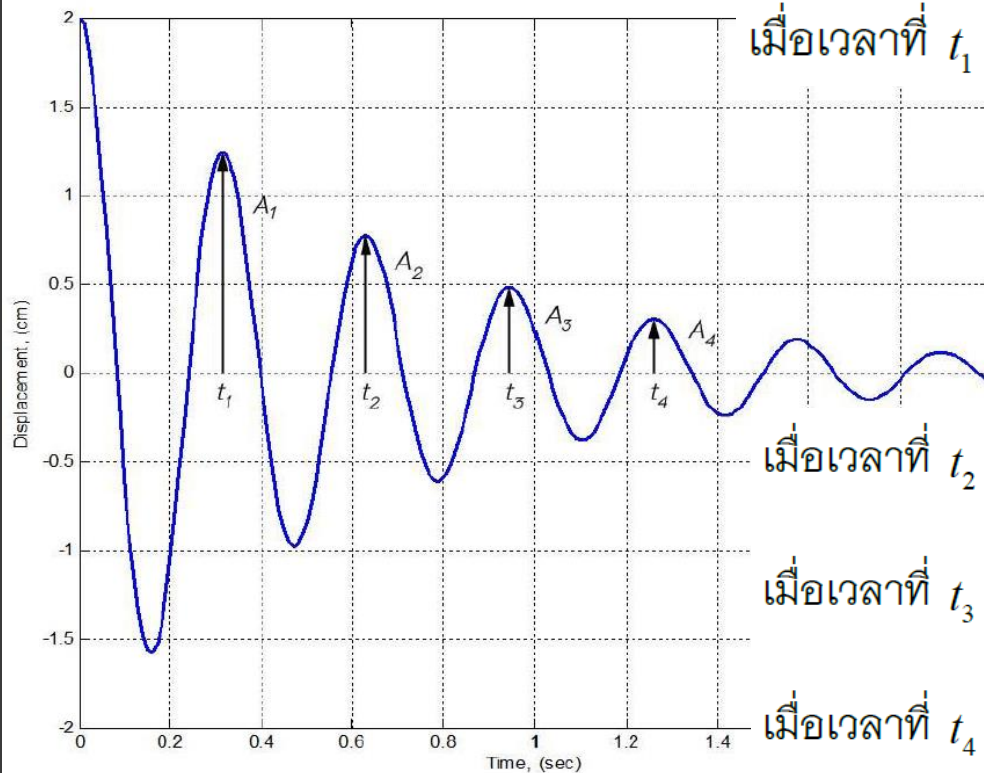
$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{A_1}{A_{n+1}} \quad (2.38)$$

EX: LOGARITHMIC DECREMENT



รูปที่ e2-15. การสั่นอิสระของระบบที่มีความหน่วงต่ำ

EX: LOGARITHMIC DECREMENT



เมื่อเวลาที่ $t_1 \approx 0.32 \text{ sec}$ มีค่าขนาดการสั่นเท่ากับ $A_1 \approx 1.24 \text{ cm}$

เมื่อเวลาที่ $t_2 \approx 0.63 \text{ sec}$ มีค่าขนาดการสั่นเท่ากับ $A_2 \approx 0.777 \text{ cm}$

เมื่อเวลาที่ $t_3 \approx 0.95 \text{ sec}$ มีค่าขนาดการสั่นเท่ากับ $A_3 \approx 0.4823 \text{ cm}$

เมื่อเวลาที่ $t_4 \approx 1.27 \text{ sec}$ มีค่าขนาดการสั่นเท่ากับ $A_4 \approx 0.296 \text{ cm}$

รูปที่ e2-15. การสั่นอิสระของระบบที่มีความหน่วงต่ำ

เราสามารถหาค่าความถี่ธรรมชาติความหน่วงจากการสั่นอิสระได้

$$\omega_d = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.63 - 0.31} = 19.63 \text{ rad/sec}$$

EX: LOGARITHMIC DECREMENT

การลดลงอย่างลอการิทึม

$$\delta = \ln \frac{A_1}{A_2} = \ln \frac{1.24}{0.777} = 0.467$$

ดังนั้นเราจะได้อัตราส่วนความหน่วง

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} = \frac{0.467}{\sqrt{4\pi^2 + 0.467^2}} = 0.074$$

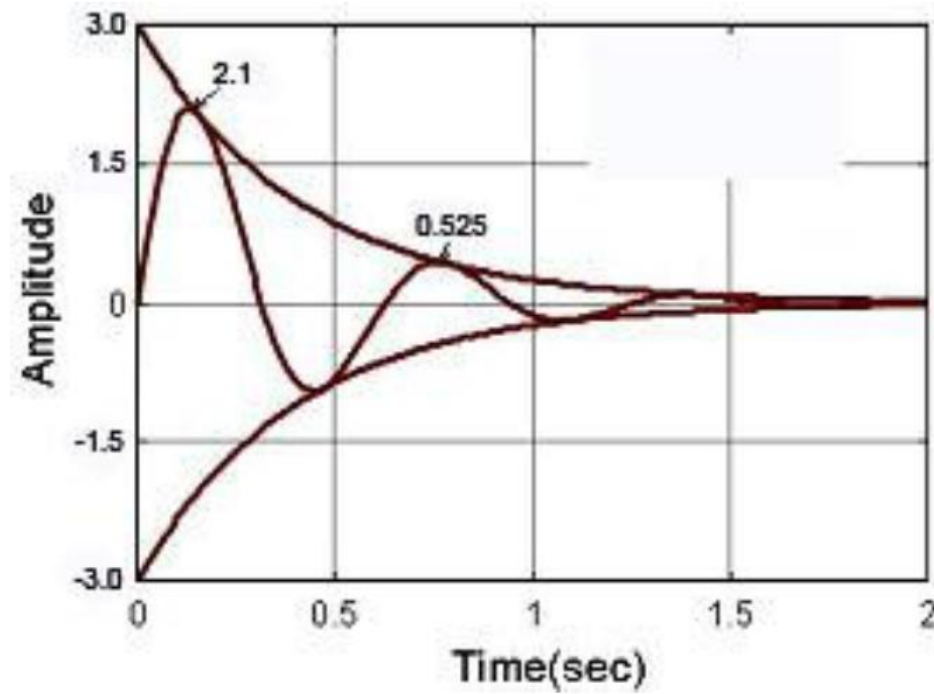
หรือพิจารณาจากเวลาที่ t_1 กับ t_3

$$\delta = \frac{1}{2} \ln \frac{A_1}{A_{2+1}} = \frac{1}{2} \ln \frac{1.24}{0.4823} = 0.472$$

จะได้อัตราส่วนความหน่วง

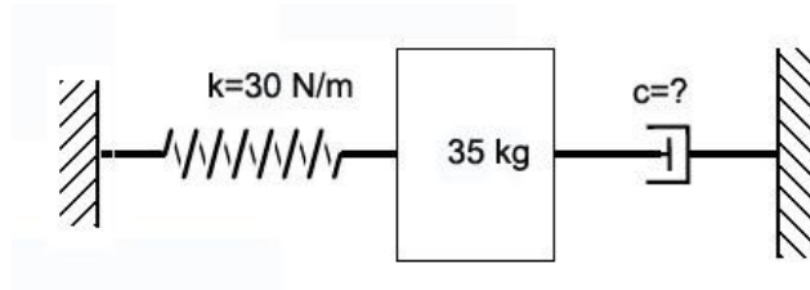
$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} = \frac{0.472}{\sqrt{4\pi^2 + 0.472^2}} = 0.075$$

14. จากรูป Q2-7 เป็นผลการตอบสนองการสั่นอิสระของระบบที่มีความหน่วงต่ำ จงหาค่าอัตราส่วนความหน่วง



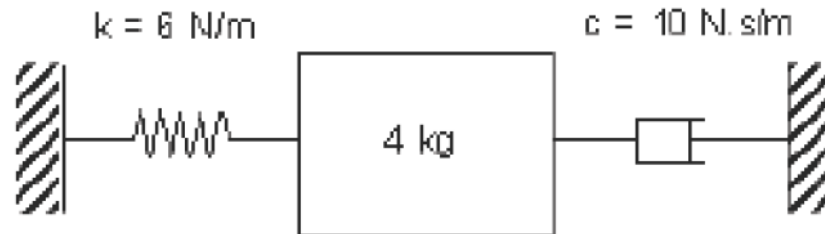
รูปที่ Q2-7

10. จากรูปที่ Q2-3 ที่กำหนดให้ จงหาค่าคงที่ความหน่วง เมื่อเป็นระบบการสั่นอิสระของระบบที่มีความหน่วงวิกฤต



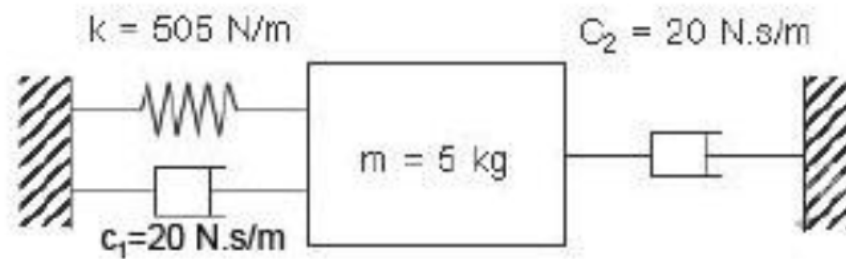
รูปที่ Q2-3.

11. จงพิจารณาชนิดการสั่นอิสระของระบบ ที่แสดงในรูป Q2-4



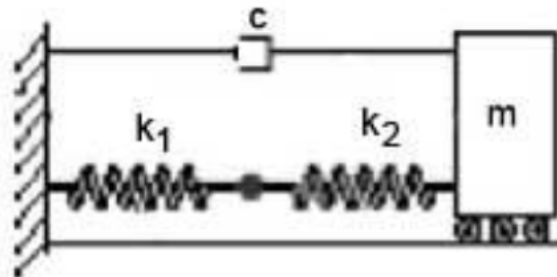
รูปที่ Q2-4

12. จากรูป Q2-5 พิจารณาการสั่นอิสระของระบบที่มีความหน่วง จงหาค่าคงที่ความหน่วงเทียบเท่า ค่าอัตราส่วนความหน่วงของระบบ พร้อมทั้งผลการตอบสนองของระบบ เมื่อเงื่อนไขเริ่มต้น $x_0 = 0.02 \text{ m}$, $v_0 = 0 \text{ m/s}$



รูปที่ Q2-5

13. จากรูป Q2-6 การสั่นอิสระของระบบที่มีความหน่วง ซึ่งมีมวลเท่ากับ 10 kg และค่าคงที่ความหน่วงเท่ากับ 100 N.s/m ค่าความแข็งของสปริง $k_1 = 5000 \text{ N/m}$, $k_2 = 3000 \text{ N/m}$



รูปที่ Q2-6